De Baltic Way is een internationale wiskundewedstrijd tussen elf Noord-Europese landen. Afgelopen november vond de 26ste editie plaats in Stockholm. Sinds een paar jaar is het traditie om een extra land uit te nodigen. Vorig jaar was dat Nederland en zo kwam het dat vijf Nederlandse middelbare scholieren in november op het vliegtuig naar Zweden stapten, op weg naar Baltic Way 2015.

■ door Julian Lyczak

BONTE WAS

Op 23 augustus 1989 vond in Estland, Letland en Litouwen een vreedzaam protest plaats tegen de Sovjet-Unie aan wie de drie Baltische staten precies vijftig jaar daarvoor hun onafhankelijkheid verloren. Over een afstand van ruim 600 kilometer werd een menselijke keten gevormd langs de hoofdsteden Riga, Tallinn en Vilnius. De demonstratie leverde de landen veel internationale publiciteit en dat zorgde uiteindelijk binnen een jaar voor de onafhankelijkheid van de drie landen.

Ter nagedachtenis aan dit protest dat tot de onafhankelijkheid leidde, werd in 1990 voor het eerst de 'Baltic Way' georganiseerd tussen Estland, Letland en Litouwen. In de afgelopen 25 jaar is de lijst met deelnemende landen stapsgewijs uitgebreid tot het huidige aantal van elf: naast de drie Baltische staten zijn dat Finland, Zweden, Noorwegen, Denemarken, IJsland (het eerste land dat de onafhankelijkheid van Estland, Letland en Litouwen erkende), Polen, Duitsland en Rusland. Nederland was dit jaar als twaalfde land te gast bij de Baltic Way.

Het concept van de wedstrijd is in al die jaren nagenoeg ongewijzigd gebleven. Ieder land stuurt vijf middelbare scholieren die als team gedurende vierenhalf uur aan twintig opgaven moeten werken. De charme van de wedstrijd is dus dat je als team voor ieder lid de juiste opgave moet uitzoeken.

weeknr.	begin van de week R	begin van de week B	begin van de week G	eind van de week R	eind van de week B	eind van de week G
1	0	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$
2	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$
3	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{30}{3}$
4	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{30}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$

Tabel 1

Dit ging het Nederlandse team, bestaande uit Levi van de Pol, Michiel Versnel, Mieke Wessel, Reinier Schmiermann en Wietze Koops, goed af: ze werden vierde. Alleen Rusland, Polen en Estland bleven het Nederlandse team voor.

DRIE WASMANDEN Een van die twintig opgaven ging over rode, blauwe en groene kleren:

> Binnen een gezin worden rode, blauwe en groene kleren gedragen. Er zijn drie identieke wasmanden; voor elke kleur één. Aan het begin van de eerste week zijn alle wasmanden leeg. Elke week produceert het gezin in totaal 10 kg aan was (waarbij de verdeling over de drie kleuren kan variëren). De was wordt per kleur in de juiste wasmand gestopt. Vervolgens wordt aan het eind van de week de zwaarste wasmand (of één van de zwaarste wasmanden, als er meerdere zijn) geleegd en wordt zijn inhoud gewassen. Wat is de minimale capaciteit die de wasmanden moeten hebben om te garanderen dat de was altijd in de juiste wasmand past?

Stel eens, om makkelijk te beginnen, dat de familie alleen maar rode kleren draagt. Dan zijn de groene en blauwe wasmanden dus altijd leeg. De rode wasmand bevat dan voor het wassen altijd 10 kg aan was en is na het wassen uiteraard leeg. In het bijzonder moet de capaciteit van die wasmand dus 10 kg zijn.

Er zijn natuurlijk ook andere situaties. Wat nu als er altijd evenveel rode, blauwe als groene was is? Dan krijgen we de situatie zoals die in tabel 1 is weergegeven. Daarin is aangegeven hoeveel was er steeds aan het begin van een week en aan het eind van die week in de manden zit; daarna wordt de inhoud van de zwaarste mand gewassen en begint de volgende week. In dit geval zien we dat de hoeveelheden was vanaf de derde week steeds hetzelfde zijn, maar steeds een mand opschuiven. Dus ook in deze situatie zijn wasmanden met een capaciteit van 10 kg voldoende groot.

Toch kunnen we in dit voorbeeld al zien dat er situaties zijn waarin zulke wasmanden te klein zouden zijn. Stel bijvoorbeeld dat in week 4 (de inhouden zijn aan het begin $\frac{20}{3}$, $\frac{10}{3}$ en 0) de hele familie die week alleen rode kleren draagt. Dan is er opeens $10 + \frac{20}{3} = 16\frac{2}{3}$ kg aan rode was aan het eind van de week. Dit levert dus een nieuwe ondergrens voor de benodigde capaciteit.

In tabel 2 zie je nog een voorbeeld. Hierna is er helemaal geen was meer, maar voordat je gaat wassen moet een wasmand toch 15 kg was aan kunnen. Als we vanaf week 2 (de situatie (0, 5, 0)) de was weer over de eerste twee wasmanden hadden verdeeld zodat we $(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 0)$ kregen, dan zien we dat we zelfs $17\frac{1}{2}$ kg per kleur kwijt moeten kunnen. We zouden echter nog een keer de eerste twee wasmanden even vol kunnen maken en dan weer wassen. Zo krijgen we zelfs de situatie zoals in tabel 3.

De inhoud lijkt nu steeds dichter bij 10 te komen en dan zou de minimale capaciteit in ieder geval 20 moeten zijn. Dat de inhoud van de middelste wasmand daadwerkelijk steeds dichter bij 10 kg komt te liggen, kunnen we als volgt zien: bekijk de situatie $(0, w, 0)$ met $0 \leq w < 10$. Als we er weer 10 kg aan was bij stoppen en willen zorgen dat de totale was (dat is dus $10 + w$ kg) eerlijk verdeeld is over de twee eerste wasmanden, dan krijgen we de situatie $((10 + w)/2, (10 + w)/2, 0)$ en na het wassen is dat dus $(0, (10 + w)/2, 0)$. In het bijzonder is $(10 + w)/2 > (w + w)/2 = w$, aangezien $10 > w$. Dus neemt de inhoud van de middelste wasmand per stap toe. Natuurlijk wel zolang het onder de 10 blijft, maar dat is zo, want $(10 + w)/2 < (10 + 10)/2 = 10$ aangezien $w < 10$. We kunnen zelfs nog meer zeggen: de

weeknr.	begin R	begin B	begin G	eind R	eind B	eind G
1	0	0	0	5	5	0
2	0	5	0	0	15	0

Tabel 2

weeknr.	begin R	begin B	begin G	eind R	eind B	eind G
1	0	0	0	5	5	0
2	0	5	0	$7\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	0
3	0	$7\frac{1}{2}$	0	$8\frac{3}{4}$	$8\frac{3}{4}$	0
4	0	$8\frac{3}{4}$	0	$9\frac{3}{8}$	$9\frac{3}{8}$	0

Tabel 3

inhoud van de rode en blauwe wasmanden aan het eind van week n is $10 - 5/2^{n-1}$. Merk op dat dit zo is voor de weken 1 tot en met 4. Voor wie het bewijsprincipe van 'volledige inductie' kent: je kunt daarmee laten zien dat deze formule klopt voor iedere week door te gebruiken dat

$$\frac{10 + \left(10 - \frac{5}{2^{n-1}}\right)}{2} = 10 - \frac{5}{2^n}.$$

Als we dus maar lang genoeg door gaan, dan zien we dat de hoeveelheid was inderdaad steeds dichter bij 10 komt te liggen. Als er dan opeens een week zou zijn met alleen maar was voor de middelste wasmand, dan is iedere capaciteit onder de 20 dus te weinig. De minimale capaciteit is dus in ieder geval niet kleiner dan 20 kg.

Helaas zijn zelfs zulke wasmanden te klein. Dat blijkt uit de oplossing die gegeven werd door het Nederlandse team, die we hieronder zullen beschrijven. Als je er liever eerst zelf over nadenkt waarom wasmanden van 20 kg niet groot genoeg zijn, lees dan nog niet direct verder.

OPLOSSING Laten we M schrijven voor de minimale capaciteit die we moeten vinden. Een opgave als deze bestaat altijd uit twee delen:

- bewijzen dat – hoe de was iedere week ook over de drie kleuren verdeeld is – de wasmanden nooit vol raken als ze capaciteit M hebben;
- laten zien dat er een situatie is, waarin wasman-

den met capaciteit kleiner dan M niet voldoen (zoals we dat hierboven voor 20 hebben gedaan). Maar wat is nu die waarde van M? Die blijkt 25 te zijn! We gaan nu eerst laten zien dat deze capaciteit voldoende is. Daarvoor voeren we eerst wat notatie in. Laat (r_i, b_i, g_i) de hoeveelheden rode, blauwe en groene was zijn aan het begin van week i. De totale hoeveelheid was op dat moment noteren we met $w_i = r_i + b_i + g_i$. Voor $i = 1$ zijn deze vier waarden allemaal 0. De eerste opmerking die je kan maken, is dat de totale hoeveelheid was niet heel erg snel kan groeien: in week i komt er 10 kg was bij en van de nieuwe hoeveelheid totale was wordt minstens $\frac{1}{3}$ deel gewassen. Dus vinden we $w_{i+1} \leq \frac{2}{3}(w_i + 10)$. Dit kunnen we nu herschrijven tot

$$w_{i+1} - 20 \leq \tfrac{2}{3}(w_i + 10) - 20 = \tfrac{2}{3}(w_i + 10 - 30) = \tfrac{2}{3}(w_i - 20).$$

Als we dit nu herhaaldelijk toepassen, vinden we

$$\begin{aligned} w_{i+1} - 20 &\leq \tfrac{2}{3}(w_i - 20) \\ &\leq (\tfrac{2}{3})^2(w_{i-1} - 20) \leq \ldots \\ &\leq (\tfrac{2}{3})^i(w_1 - 20) = -20 \cdot (\tfrac{2}{3})^i. \end{aligned}$$

Dus $w_{i+1} \leq 20(1 - (\frac{2}{3})^i)$, ofwel $w_i \leq 20(1 - (\frac{2}{3})^{i-1})$ < 20 voor $i \geq 2$. Er is dus na het wassen nooit meer dan 20 kg was over.

Nu kunnen we laten zien dat er nooit 15 kg of meer vuile was in een wasmand kan zitten aan het begin van de week. Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Neem dus aan dat aan het begin van een gegeven week k een van de wasmanden ten minste 15 kg bevat. Het maakt natuurlijk niet uit welke wasmand dat is, dus laten we zeggen dat dit om groene was gaat en dat er zojuist een rode was is gedraaid. Dan geldt dus $g_k \geq 15$ en $r_k = 0$. Vóór het wassen was er blijkbaar minstens zoveel rode als groene was, anders hadden we geen rode was gedaan, dus voor het wassen was er minstens $2 \cdot 15 = 30$ kg aan vuile was. Sinds de vorige wasbeurt is daar natuurlijk 10 kg was bijgekomen, dus blijkbaar geldt $w_{k-1} \geq 20$. Maar we hadden net laten zien dat dat niet kan.

Dus blijkbaar is aan het begin van de week iedere mand met minder dan 15 kg was gevuld en aan het eind van de week zit in iedere mand minder dan 15 + 10 kg was. Manden met een capaciteit van 25 kg stromen dus nooit over (sterker nog, ze raken zelfs nooit vol)!

Nu moeten we dus laten zien dat wasmanden met een kleinere capaciteit mogelijk overvol zouden kunnen raken. We gaan laten zien dat we zulke wasmanden vol kunnen laten raken.

In het bewijs dat een capaciteit van 25 kg voldoende is, gebruikten we dat de totale hoeveelheid was aan het begin van de week nooit meer is dan 20 kg. Hoe zouden we daarbij in de buurt kunnen komen? In de afschatting daarvoor gebruikten we dat er minstens $\frac{1}{3}$ deel van de was wordt gewassen. Als nou alle drie de wasmanden even vol zitten aan het eind van de week, dan wassen we steeds precies $\frac{1}{3}$ van de totale was. Dan krijgen we tabel 4.

weeknr.	begin van de week R	begin van de week B	begin van de week G	eind van de week R	eind van de week B	eind van de week G
1	0	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$
2	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{50}{9}$	$\frac{50}{9}$	$\frac{50}{9}$
3	0	$\frac{50}{9}$	$\frac{50}{9}$	$\frac{190}{27}$	$\frac{190}{27}$	$\frac{190}{27}$

Tabel 4

We vinden nu juist gelijkheid in alle afschattingen voor de w_i die we hierboven hadden gevonden: $w_{i+1} = \frac{2}{3}(w_i + 10)$ en dus $w_{i+1} - 20 = \frac{2}{3}(w_i - 20)$. Hiermee kunnen we op dezelfde manier laten zien dat $w_{i+1} - 20 = -20 \cdot (\frac{2}{3})^i$ en dus $w_i = 20(1 - (\frac{2}{3})^{i-1})$. Op deze manier komen we dus uiteindelijk heel dicht bij de 20 kg aan was.

De tweede stap in het eerste deel van het bewijs gebruikte dat er nooit 15 kg of meer was in een wasmand zit aan het begin van de week. Maar kunnen we wel willekeurig dicht bij die 15 komen? Bij het maken van bijna 20 kg aan was hadden we al twee wasmanden met bijna 10 kg. Als nu de volgende was gelijk wordt verdeeld over deze twee wasmanden, dan krijgen we dus tweemaal een gewicht dat nagenoeg 15 kg is. Hierna wordt uiteraard één van deze wasmanden geleegd. Als nu in de volgende week alle was in de nog gevulde wasmand terechtkomt, dan krijgen we een wasmand met zo goed als 25 kg. Dit laat zien dat wasmanden met een capaciteit kleiner dan 25 kg echt overvol kunnen raken!

De conclusie is dus dat 25 kg de kleinste capaciteit is voor de wasmanden, zodat de familie altijd de was kwijt kan. ■